TEMA 2: PUERTAS LÓGICAS Y ÁLGEBRA DE CONMUTACIÓN.

2.1. Operaciones lógicas básicas.

Las operaciones básicas se definen como suma lógica, o bien operación "OR", y se representará con el signo "+", y el producto lógico u operación "AND", y se representará con el signo "·". A veces, por comodidad, la omisión de signo significará producto lógico. Las operaciones OR y AND se efectuan entre dos o más elementos. También definiremos la operación complementario, inverso o negado, que se aplica a un solo elemento.

Estas operaciones, por definición, son tales que:

La **suma lógica** tomará el valor 1 cuando un elemento **o** bien otro (o todos) tome el valor 1. En caso contrario será 0.

El **producto lógico** tomará el valor 1 cuando un elemento **y** otro (y todos) tome el valor 1. En caso contrario será 0.

Es decir, en la suma lógica es *suficiente* con que un elemento sea 1 para que el resultado sea 1. Sin embargo, en el producto lógico, es *necesario* que todos los elementos sean 1 para que el resultado sea 1.

El **complementario, negado o inverso** tomará el valor 1 cuando el elemento tome el valor 0, y tomará el valor 0 cuando el elemento tome el valor 1. Se trepresenta como $\overline{x}$. La operación **X-OR** también llamada **OR-Exclusiva**, se define entre dos valores de la siguiente forma: vale 0 si son iguales y vale 1 si son distintos. Su operador es “$\oplus$ “. También se pueden definir las operaciones complementario de la suma $\overline{x+y}$ (**NOR**) y complementario del producto $\overline{x \cdot y}$ (**NAND**).

Una forma gráfica de representar los valores de operar elementos con estas operaciones es la llamada tabla de verdad, que no es más que una tabla en la que aparecen todos los casos posibles y sus resultados. Vamos a expresar los resultados de la suma y el producto lógico, así como otras operaciones más, en forma de tabla de verdad:

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$x+y$ **OR**	$x \cdot y$ **AND**	$\overline{x}+\overline{y}$	$\overline{x} \cdot \overline{y}$	$\overline{x+y}$ **NOR**	$\overline{x \cdot y}$ **NAND**	$x \oplus y$ **XOR**	$\overline{x \oplus y}$ **XNOR**
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1

Supongamos que el valor 0 lo asignamos a FALSO y el valor 1 a VERDADERO.

Supongamos que decimos la frase x = "Esta carpeta es blanca", y la frase y = "Esta carpeta es de cartón".

La frase x+y será: "Esta carpeta es blanca o esta carpeta es de cartón". Para que esta expresión sea verdadera, es decir, x+y sea 1, basta con que sea cierta cualquiera de ellas por separado, o ambas.

Aquí vemos la relación de la conjunción disyuntiva “o” con la operación lógica OR.

Sea la frase x = "Estamos en septiembre", y la frase y = "Estamos en Ciudad Real".

La frase x·y será: "Estamos en octubre y estamos en Ciudad Real". Para que esta expresión sea verdadera, es decir, x·y sea 1, es necesario que ambas sean ciertas. Si una de ellas, o ambas, no es cierta, el conjunto será falso.

Aquí vemos la relación de la conjunción copulativa “y” con la operación lógica AND.

Una representación circuital de la función OR aparece en la Figura 1.

Una representación circuital de la función AND aparece en la Figura 2.

En el primer caso la bombilla B se enciende si se cierra el interruptor I1 o el interruptor I2, que están en paralelo.

Es **suficiente** que un interruptor esté cerrado para que luzca la bombilla.

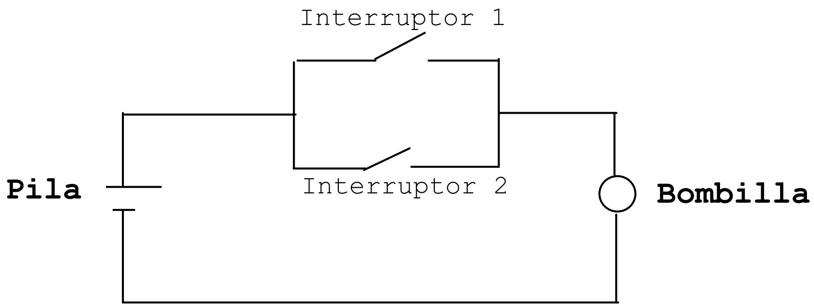


Fig. 1

En el segundo caso la bombilla se enciende si se cierra el interruptor I1 y el interruptor I2, que están en serie.

Es **necesario** que todos los interruptores estén cerrados para que luzca la bombilla.

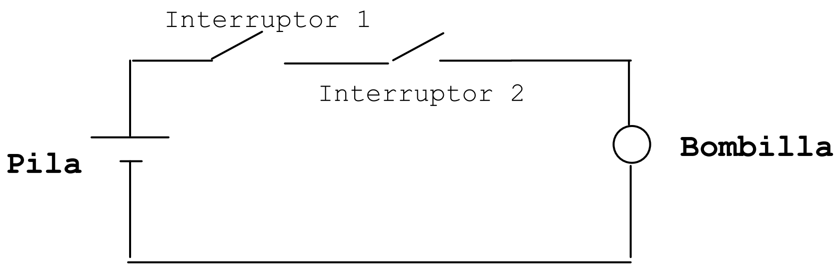
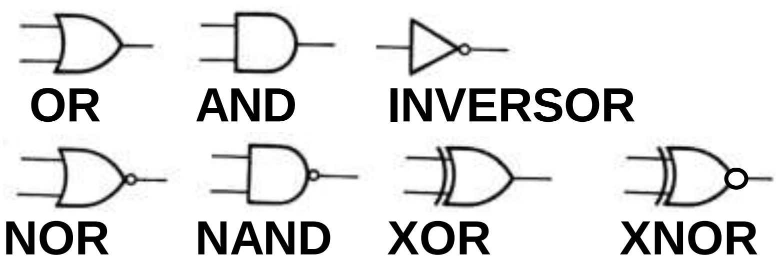


Fig. 2

Otra forma más de verlo. La operación OR como pertenecer a la unión de 2 conjuntos y la operación AND como pertenecer a la intersección de dos conjuntos.

2.2. Puertas lógicas básicas.

Existen dispositivos tecnológicos llamados PUERTAS LOGICAS que llevan a cabo las funciones lógicas. Pueden tener 2 ó mas entradas. Las puertas básicas son:

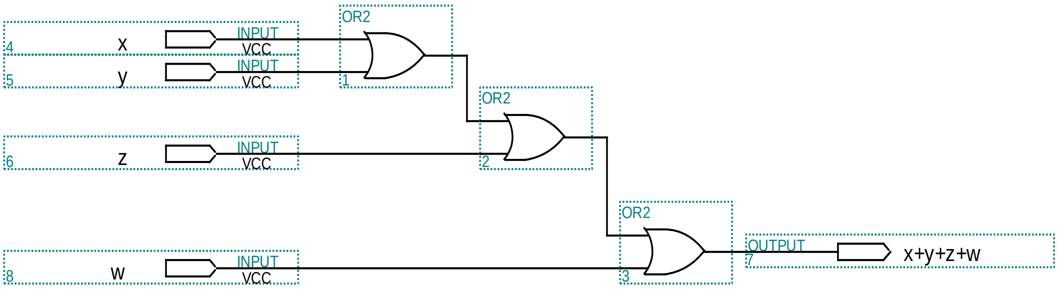


Es fácil comprobar que:

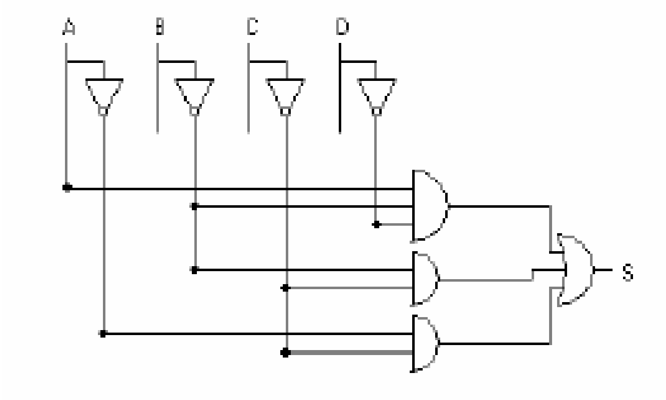
$$x \oplus y = x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y$$

$$\overline{x \oplus y} = x \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{y}$$

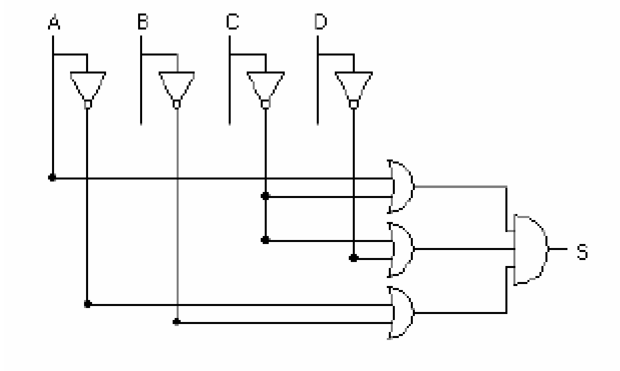
Estructura multinivel con puertas de dos entradas:



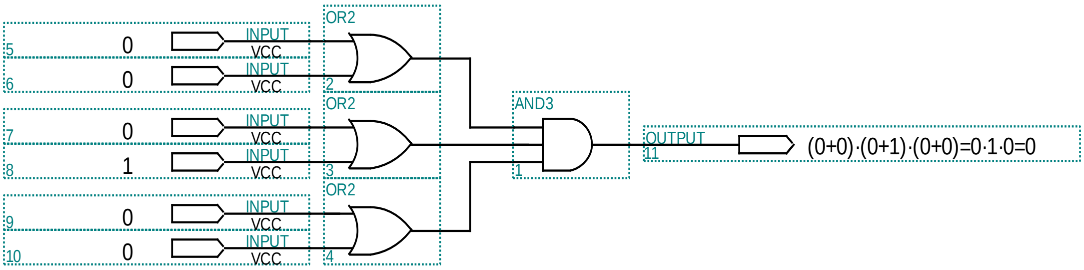
Estructura de dos niveles con puertas de dos y tres entradas entradas (AND-OR):



Estructura de dos niveles con puertas de dos entradas entradas (OR-AND):



Ejemplo:



2.3. Algebra de Boole. Teoremas básicos.

El Algebra de Boole constituye la base matemática para el análisis lógico de los circuitos básicos que integran las máquinas digitales.

El Algebra de Boole se dice que es bivalente o de conmutación cuando B es un conjunto con dos elementos, que llamaremos "0" y "1". Las operaciones **+** y **·** son la suma lógica y producto lógico, respectivamente.

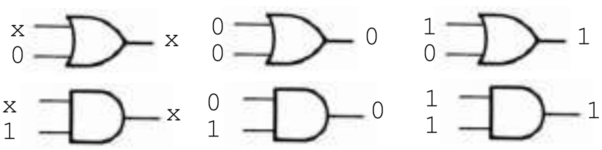
Un Algebra de Boole es un conjunto B, en el que se han definido dos operaciones **+** y **·**, que cumple los siguientes postulados:

1) **B es cerrado:** El resultado de operar dos elementos con cualquier operación produce un elemento del conjunto B.

$$\forall x, y \in B \qquad x + y \in B \qquad x \cdot y \in B$$

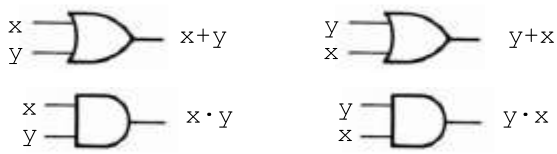
2) **Elemento identidad:**

$\forall x \in B$ existe un elemento 0 tal que $x + 0 = x$
$\forall x \in B$ existe un elemento 1 tal que $x \cdot 1 = x$



3) **Propiedad conmutativa:**

$\forall x, y \in B$ se cumple
$x + y = y + x$
$x \cdot y = y \cdot x$



4) **Propiedad distributiva de una operación respecto a otra:**

$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ o bien $(x \cdot y) + (x \cdot z) = x \cdot (y + z)$, sacando x "factor común"
$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$ o bien $(x + y) \cdot (x + z) = x + (y \cdot z)$, sacando x "factor común"

5) **Existencia de elemento complementario.**

$\forall x \in B$, existe un elemento $\bar{x}$ llamado complementario que cumple que:

$$x + \bar{x} = 1$$
$$x \cdot \bar{x} = 0$$

Como consecuencia de estos postulados se obtienen los siguientes teoremas:

Teorema 1:

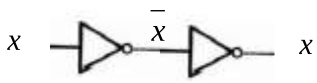
$x + 1 = 1$
$x \cdot 0 = 0$

Teorema 2:

$x + x = x$
$x \cdot x = x$

Teorema 3:

$$\overline{\overline{x}} = x$$



Teorema 4: Absorción.

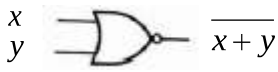
$$x + x \cdot y = x \qquad x + \overline{x} \cdot y = x + y$$
$$x \cdot (x + y) = x \qquad x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$$

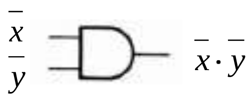
Teorema 5: Propiedad asociativa.

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

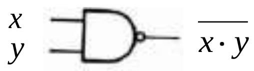
Teorema 6: Leyes de De Morgan.

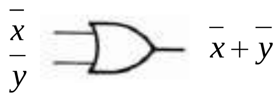
$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$





$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$





2.4. Expresiones de conmutación. Formas canónicas.

Un símbolo x es una variable booleana si representa a cualquier elemento de un conjunto B sobre el que se ha definido un Algebra de Boole.

Una función booleana o de conmutación es una expresión algebraica de variables booleanas con las operaciones +, * y complemento.

Ejemplo: $F(x, y, z) = \overline{x} \cdot \overline{y} + y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z$

La prioridad de los operadores, en caso de haber varios, es: paréntesis, complementos, productos y sumas.

Una función se puede representar mediante su expresión algebraica o mediante su tabla de verdad. Si tenemos n variables booleanas, existen 2^n permutaciones con repetición posibles, para cada una de ellas la función tendrá que tomar un valor de los 2 posibles: 0 ó 1. Dos funciones booleanas se dice que son equivalentes si tienen la misma tabla de verdad en los 2^n casos posibles. Ejemplo:

$$F = \overline{x + y} \qquad G = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

SIMPLIFICACIÓN: $F(x_1, x_2, .., x_N) ----> G(x_1, x_2, ..., x_N)$

F y G equivalentes: misma tabla de verdad. G más sencilla.

Simplificación algebraica. Consiste en aplicar las propiedades del A. Boole y operar algebraicamente.

$$F(x, y, z) = \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z =$$

$= \overline{x} \cdot \overline{z} \cdot (y + \overline{y}) + x \cdot \overline{y} \cdot (\overline{z} + z) + y \cdot z \cdot (\overline{x} + x)$ factor común 1-2, 3-6, 4-5

$= \overline{x} \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{y} + y \cdot z$ (Expresión mínima) o bien

$$= \overline{x}\cdot y\cdot(\overline{z} + z) + \overline{y}\cdot\overline{z}\cdot(\overline{x} + x) + x\cdot z\cdot(y + \overline{y})$$ factor común 1-4, 2-3, 5-6

$$= \overline{x}\cdot y + \overline{y}\cdot\overline{z} + x\cdot z$$ (Otra expresión mínima)

El hecho de encontrar una expresión mínima no significa que sea única. Aquí tenemos un ejemplo.

Desdoblando los términos 2º y 5º y agrupando, queda:

$$F(x, y, z) = \overline{x}\cdot y\cdot\overline{z} + \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z} + \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z} + x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z} + \overline{x}\cdot y\cdot z + x\cdot y\cdot z + x\cdot y\cdot z + x\cdot\overline{y}\cdot z =$$

$$= \overline{x}\cdot\overline{z}\cdot(y + \overline{y}) + \overline{y}\cdot\overline{z}\cdot(\overline{x} + x) + y\cdot z\cdot(\overline{x} + x) + x\cdot z\cdot(y + \overline{y}) =$$

$$= \overline{x}\cdot\overline{z} + \overline{y}\cdot\overline{z} + y\cdot z + x\cdot z$$ (Expresión irreducible)

El hecho de encontrar una expresión irreducible no significa que sea mínima. Aquí tenemos un ejemplo.

INCONVENIENTE: FELIZ IDEA Y ASTUCIA. POCO SISTEMÁTICO

Formas canónicas.

Término canónico: suma o producto en que aparecen **todas** las variables, ya sean en forma afirmada o en forma negada.

Productos canónicos: minitérminos o minterms.

Sumas canónicas: maxitérminos o maxterms.

Función n variables: 2^n maxitérminos y 2^n minitérminos.

Expresión de una función booleana en forma canónica:

1) Sumar los minitérminos que dan el valor 1 para la función.

2) Multiplicar los maxitérminos que dan a la función valor 0.

La primera forma canónica consiste en expresar una función como suma de productos canónicos. La segunda forma canónica consiste en expresar una función como productos de sumas canónicas.

Ejemplo:

	x y z	F	
lugar 0	0 0 0	0	Si hay un "1" genera el minitérmino 0. Si hay un "0" genera el maxitérmino 0
lugar 1	0 0 1	1	Si hay un "1" genera el minitérmino 1. Si hay un "0" genera el maxitérmino 1
lugar 2	0 1 0	0	Si hay un "1" genera el minitérmino 2. Si hay un "0" genera el maxitérmino 2
lugar 3	0 1 1	0	Si hay un "1" genera el minitérmino 3. Si hay un "0" genera el maxitérmino 3
lugar 4	1 0 0	0	Si hay un "1" genera el minitérmino 4. Si hay un "0" genera el maxitérmino 4
lugar 5	1 0 1	1	Si hay un "1" genera el minitérmino 5. Si hay un "0" genera el maxitérmino 5
lugar 6	1 1 0	1	Si hay un "1" genera el minitérmino 6. Si hay un "0" genera el maxitérmino 6
lugar 7	1 1 1	1	Si hay un "1" genera el minitérmino 7. Si hay un "0" genera el maxitérmino 7

Denominación de los minitérminos y los maxitérminos:

Minterm 0: $m_0 = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$ porque si y sólo si $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, entonces $m_0 = 1$

Minterm 1: $m_1 = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z$ porque si u sólo si $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, entonces $m_1 = 1$

Minterm 2: $m_2 = \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}$ porque si y sólo si $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$, entonces $m_2 = 1$

Minterm 3: $m_3 = \overline{x} \cdot y \cdot z$ porque si y sólo si $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$, entonces $m_3 = 1$

Minterm 4: $m_4 = x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$ porque si y sólo si $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, entonces $m_4 = 1$

Minterm 5: $m_5 = x \cdot \overline{y} \cdot z$ porque si y sólo si $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$, entonces $m_5 = 1$

Minterm 6: $m_6 = x \cdot y \cdot \overline{z}$ porque si y sólo si $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, entonces $m_6 = 1$

Minterm 7: $m_7 = x \cdot y \cdot z$ porque si y sólo si $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, entonces $m_7 = 1$

Maxterm 0: $M_0 = x + y + z$ porque si y sólo si $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, entonces $M_0 = 0$

Maxterm 1: $M_1 = x + y + \overline{z}$ porque si y sólo si $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, entonces $M_1 = 0$

Maxterm 2: $M_2 = x + \overline{y} + z$ porque si y sólo si $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$, entonces $M_2 = 0$

Maxterm 3: $M_3 = x + \overline{y} + \overline{z}$ porque si y sólo si $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$, entonces $M_3 = 0$

Maxterm 4: $M_4 = \overline{x} + y + z$ porque si y sólo si $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, entonces $M_4 = 0$

Maxterm 5: $M_5 = \overline{x} + y + \overline{z}$ porque si y sólo si $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$, entonces $M_5 = 0$

Maxterm 6: $M_6 = \overline{x} + \overline{y} + z$ porque si y sólo si $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, entonces $M_6 = 0$

Maxterm 7: $M_7 = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$ porque si y sólo si $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, entonces $M_7 = 0$

Para la tabla del ejemplo anterior, quedarían la suma de los minitérminos 1, 5, 6 y 7. Aunque también se podría expresar como el producto de los maxitérminos 0, 2, 3 y 4.

Otra forma de verlo es la siguiente:

Primera forma canónica: $F(x, y, z) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z$

```
1° caso en que la función vale 1:    x=0, y=0, z=1
2° caso en que la función vale 1:    x=1, y=0, z=1
3° caso en que la función vale 1:    x=1, y=1, z=0
4° caso en que la función vale 1:    x=1, y=1, z=1
```

Segunda forma canónica: $F(x, y, z) = (x + y + z) \cdot (x + \overline{y} + z) \cdot (x + \overline{y} + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + y + z)$

```
1° caso en que la función vale 0:    x=0, y=0, z=0
2° caso en que la función vale 0:    x=0, y=1, z=0
3° caso en que la función vale 0:    x=0, y=1, z=1
4° caso en que la función vale 0:    x=1, y=0, z=0
```

Una forma compacta de representar una función es, para el ejemplo anterior:

$F(x,y,z) = m_1 + m_5 + m_6 + m_7 = \Sigma_3\ (1,5,6,7)$ como suma de minitérminos.

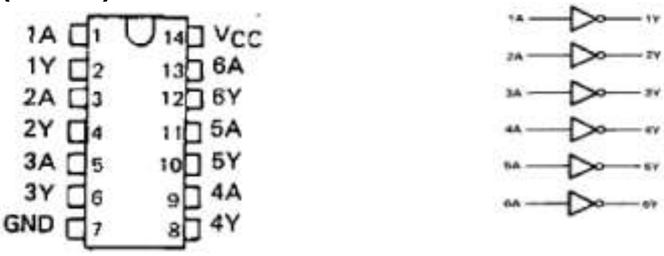
$F(x,y,z) = M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4 = \pi_3\ (0,2,3,4)$ como producto de maxitérminos.

ANEXO: Circuitos integrados SSI comunes: NOT, AND, OR, NAND Y NOR.

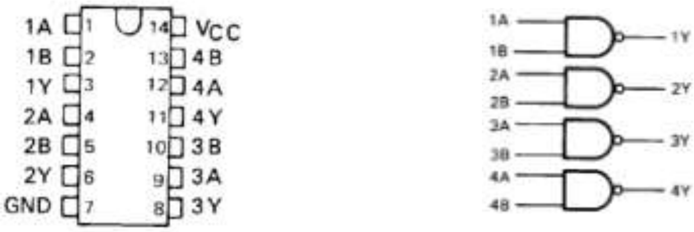
Cuatro puertas OR de 2 entradas (74LS32):

Cuatro puertas AND de 2 entradas (74LS08):

Seis inversores (74LS04):



Cuatro puertas NAND de 2 entradas (74LS00)



Cuatro puertas NOR de 2 entradas (74LS02):

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Comprobar, usando las tablas de verdad, que son equivalentes las funciones F y G, cuyas expresiones algebraicas son: $F(x,y,z)=\overline{x}\cdot\overline{y}+x\cdot z+y\cdot\overline{z}$ y $G(x,y,z)=\overline{x}\cdot\overline{z}+\overline{y}\cdot z+x\cdot y$

x	y	z	F	G
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Se evalúa cada función en los 8 casos y se comprueba que ambas columnas coinciden.
Al estar como suma de productos es suficiente con que un término sea 1 para que la función sea 1.
Sólo cuando son 0 todos los términos, la función es 0.

Por ejemplo:

$$F(1,0,1)=\overline{1}\cdot\overline{0}+1\cdot 1+0\cdot\overline{1}=0+1+0=1$$

$$F(0,1,1)=\overline{0}\cdot\overline{1}+0\cdot 1+1\cdot\overline{1}=0+0+0=0$$

2. Demostrar algebraicamente que se cumple la relación $\overline{x\oplus y}=\overline{x}\oplus y$.

$$\overline{x\oplus y}=\overline{x\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot y}=\overline{x\cdot\overline{y}}\cdot\overline{\overline{x}\cdot y}=(\overline{x}+y)\cdot(x+\overline{y})=\overline{x}\cdot x+\overline{x}\cdot\overline{y}+y\cdot x+y\cdot\overline{y}=\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{\overline{x}}\cdot y=$$

si llamamos $a=\overline{x}$**, queda**

$$=a\cdot\overline{y}+\overline{a}\cdot y=a\oplus y=\overline{x}\oplus y$$

3. Minimizar, usando las propiedades del Álgebra del Boole la expresión

$$F(x,y,z)=x\cdot\overline{y}+y\cdot\overline{z}+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z+x\cdot y\cdot z$$

Simplificación

$$F(x,y,z)=x\cdot\overline{y}+y\cdot\overline{z}+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z+x\cdot y\cdot z=x\cdot\overline{y}+y\cdot\overline{z}+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot(\overline{z}+z)+x\cdot y\cdot z=$$

$$=x\cdot\overline{y}+y\cdot\overline{z}+\overline{x}\cdot\overline{y}+x\cdot y\cdot z=(x+\overline{x})\cdot\overline{y}+y\cdot\overline{z}+x\cdot y\cdot z=\overline{y}+y\cdot\overline{z}+x\cdot y\cdot z=$$

con lo que queda

$$=\overline{y}+y\cdot(\overline{z}+x\cdot z)=\overline{y}+y\cdot(\overline{z}+x)=\overline{y}+\overline{z}+x$$

o bien podría hacer como

$$=\overline{y}+\overline{z}+x\cdot y\cdot z=\overline{y}+\overline{z}+x\cdot y=\overline{y}+x+\overline{z}$$

4.- Supongamos que queremos encender la luz de una nave industrial, activando los focos (poniéndolo a 1 la función que los controla). Para ello, se dispone de un detector de presencia en la nave, que se activa (poniéndose a 1) cuando hay una persona en el interior de la nave, un interruptor crepuscular, que se activa (poniéndose a 1) cuando es de noche y un interruptor manual, que se activa (poniéndose a 1) cuando alguien levanta una palanca desde una oficina. Encontrar la función booleana que controla el encendido suponiendo que la luz se enciende sólo en alguno de los siguientes casos:

1) Cuando se detecta la presencia de una persona en la nave y es de noche.
2) Cuando se levanta la palanca, siempre que sea de noche.

PRESENCIA (A)	CREPUSCULAR (B)	PALANCA (C)	LUZ (F)
NO	NO	NO	**NO**
NO	NO	SI	**NO**
N0	SI	NO	**NO**
N0	SI	SI	**SI**
SI	NO	NO	**NO**
SI	NO	SI	**NO**
SI	SI	NO	**SI**
SI	SI	SI	**SI**

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F = \overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC = \overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC + ABC = (\overline{A} + A)BC + AB(\overline{C} + C) = BC + AB = B(C + A)$$

5. Sean $F_1 = \sum_4 m(5,6,13)$ y $F_2 = \sum_4 m(0,1,2,3,5,6,8,9,10,11,13)$. Encontrar una función F_3 tal que $F_1 = F_2 \cdot \overline{F_3}$. Expresar la expresión de F_3 en forma de tabla de verdad.

n	A	B	C	D	F_1	F_2	$\overline{F_3}$	F_3
0	0	0	0	0	0	1	**0**	**1**
1	0	0	0	1	0	1	**0**	**1**
2	0	0	1	0	0	1	**0**	**1**
3	0	0	1	1	0	1	**0**	**1**
4	0	1	0	0	0	0	**X**	**X**
5	0	1	0	1	1	1	**1**	**0**
6	0	1	1	0	1	1	**1**	**0**
7	0	1	1	1	0	0	**X**	**X**
8	1	0	0	0	0	1	**0**	**1**
9	1	0	0	1	0	1	**0**	**1**
10	1	0	1	0	0	1	**0**	**1**
11	1	0	1	1	0	1	**0**	**1**
12	1	1	0	0	0	0	**X**	**X**
13	1	1	0	1	1	1	**1**	**0**
14	1	1	1	0	0	0	**X**	**X**
15	1	1	1	1	0	0	**X**	**X**

X significa que puede ser 0 o 1, no importa

1) Explicación de los casos n = 0, 1, 2, 3, 8, 9, 10 y 11.

Para que F_1 sea 0, como F_2 es 1, es **NECESARIO** que $\overline{F_3}$ sea 0.

2) Explicación de los casos n = 5, 6 y 13.

Para que F_1 sea 1, como F_2 es 1, es **NECESARIO** que $\overline{F_3}$ sea 1.

3) Explicación de los casos n = 4, 7, 12, 14 y 15.

Para que F_1 sea 0, como F_2 es 0, es IRRELEVANTE el valor de que $\overline{F_3}$.